Δ. Συμβολή και περίθλαση

1. Εισαγωγή

Όλα τα κύματα παρουσιάζουν φαινόμενα σύμβολής και περίθλασης που προκύπτουν από την υπέρθεση περισσοτέρων του ενός κυμάτων. Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε τα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης σε *οπτικά συστήματα.*

Περίθλαση ονομάζεται η μη γραμμική διάδοση φωτός που περνά από λεπτή σχισμή και η περίπλοκη συμπεριφορά που προκύπτει. Η συμπεριφορά περιγράφεται λαμβάνοντας υπ' όψιν την επαλληλία ή **συμβολή** των δευτερευόντων κυμάτων που ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές και έχουν διαφορές στη φάση.

Για τις διαφορετικές διαδρομές ισχύει η *αρχή του Fermat*: Το μήκος του *οπτικού δρόμου* ($= n\Delta x$, όπου n ο δείκτης διάθλασης του οπτικού μέσου και Δx η φυσική απόσταση) που διανύει το φως μεταξύ δύο σημείων έχει ακρότατη τιμή. Όταν ένας οπτικός δρόμος κείται ολόκληρος μέσα σε ένα οπτικό μέσο με σταθερό δείκτη διάθλασης, η διαδρομή είναι ευθεία. Όταν το οπτικό μέσο έχει μεταβλητό δείκτη διάθλασης, η διαδρομή είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να την διανύσει. (Αυτή η αρχή ερμηνεύει και τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης).

Για να παρατηρηθούν τα φαινόμενα της συμβολής και της περίθλασης, χρειαζόμαστε φως από την ίδια μοναδική πηγή ώστε να έχουμε συμφωνία φάσης.

2. Συμβολή

Τα φαινόμενα συμβολής μπορούν να ταξινομηθούν με δύο τρόπους:

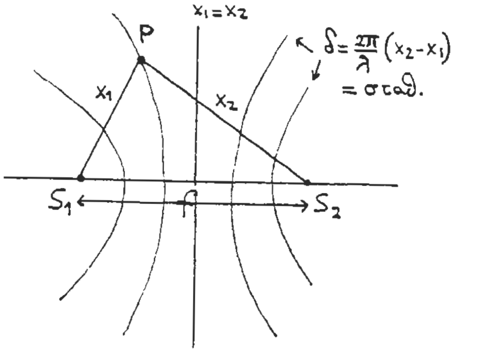
(1) *Διαίρεση μετώπου κύματος:* Το μέτωπο κύματος από μια πηγή περνά ταυτόχρονα από δύο ή περισσότερα ανοίγματα, στο καθένα από τα οποία παρατηρείται περίθλαση, τα δε κύματα από όλα τα ανοίγματα συμβάλλουν σε όλα τα σημεία του χώρου, δημιουργώντας την εικόνα συμβολής. Κάθε άνοιγμα δρα ως δευτερεύουσα πηγή.

(2) *Διαίρεση πλάτους:* Με μερική ανάκλαση ενός κύματος δημιουργούνται δύο συνιστώσες, οι οποίες ακολουθούν διαφορετικές οπτικές διαδρομές προτού συμβάλουν δημιουργώντας φαινόμενα συμβολής.

Θα ασχοληθούμε με παραδείγματα μόνο του πρώτου τρόπου.

3. Συμβολή μεταξύ κυμάτων από δύο σχισμές ή πηγές

Στο σχήμα, S_1 και S_2 είναι δύο πανομοιότυπες πηγές σε απόσταση f μεταξύ τους που εκπέμπουν σε φάση κύματα γωνιακής συχνότητας ω και πλάτους a (σύμφωνες πηγές).



Στο σημείο P (με την προϋπόθεση ότι $x_1, x_2 >> f$) έχουμε επίπεδα μέτωπα κύματος

από την S_1: $\quad y_1 = a\sin(\omega t - kx_1) \quad (1)$

και από την S_2: $\quad y_2 = a\sin(\omega t - kx_2) \quad (2)$

τα οποία διαφέρουν σε φάση κατά

$$\delta = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \qquad (3)$$

Η συνισταμένη των δύο κυμάτων είναι:

$$R = y_1 + y_2 = a[\sin(\omega t - kx_1) + \sin(\omega t - kx_2)] = 2a\cos\left[\frac{k}{2}(x_2 - x_1)\right]\sin\left[\omega t - \frac{k}{2}(x_1 + x_2)\right] \qquad (4)$$

Αγνοώντας τον χρονικά μεταβαλλόμενο όρο βρίσκουμε ως μέτρο της έντασης του σήματος, που είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους,

$$I = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2} \qquad (5)$$

Όταν $\cos\frac{\delta}{2} = \pm 1$, η ένταση είναι μέγιστη, $I = 4a^2$, και οι συνιστώσες μετατόπισης αλληλοενισχύονται ώστε να δώσουν **ενισχυτική συμβολή**. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = n\pi \qquad (6)$$

δηλαδή όταν $$x_2 - x_1 = n\lambda \qquad (7)$$

Όταν $\cos\frac{\delta}{2} = 0$, η ένταση είναι μηδέν και οι συνιστώσες αλληλοαναιρούνται, οπότε έχουμε **αναιρετική συμβολή**. Αυτό συμβαίνει όταν

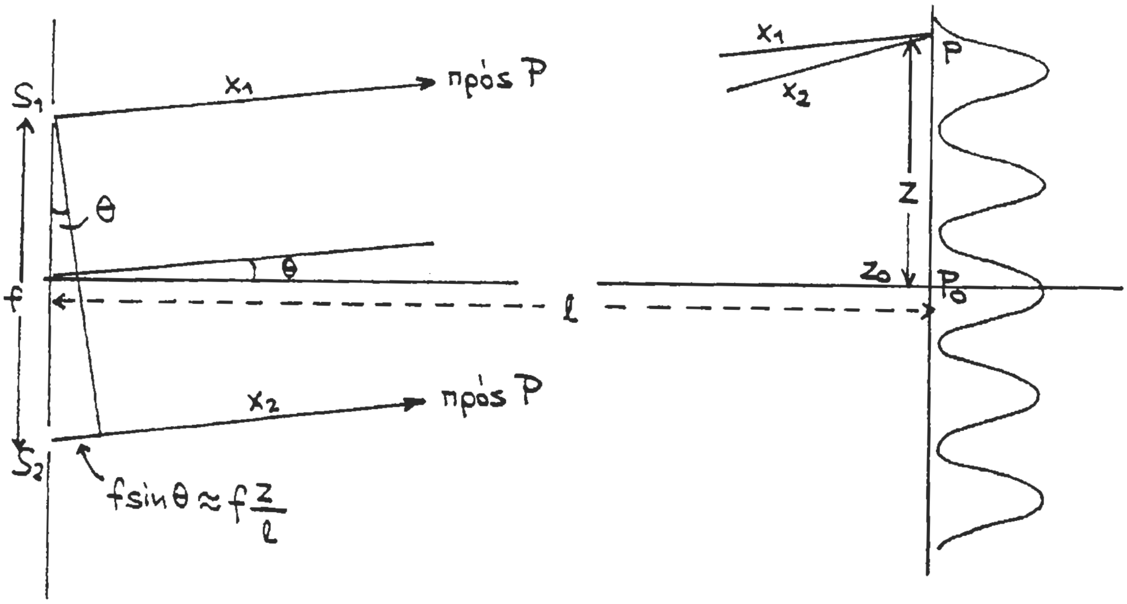
$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (8)$$

δηλαδή όταν $$x_2 - x_1 = (n + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad (9)$$

Οι ισοφασικές καμπύλες σε ένα επίπεδο είναι υπερβολές με εστιακά σημεία S_1 και S_2 (βλ. σχήμα). Οι ισοφασικές επιφάνειες είναι υπερβολοειδή εκ περιστροφής.

4. Συμβολή από δύο πανομοιότυπες πηγές σε απόσταση f

(α) *Απόσταση* $f >> \lambda$. *Το πείραμα των δύο σχισμών του Young.*
Ως πηγές δρούν δύο πανομοιότυπες σχισμές S_1 και S_2 οι οποίες φωτίζονται με μονοχρωματικό φως από μια μοναδική πηγή που ισαπέχει από τις S_1 και S_2. Το σημείο παρατήρησης P βρίσκεται σε οθόνη παράλληλη στην S_1S_2 σε απόσταση l από την S_1S_2. Η ένταση στο P είναι $I = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2}$. Είναι $PP_o = z$ και $z << l$ και $f << l$. Αυτό υποδεικνύεται με το σπάσιμο στις γραμμές x_1 και x_2 στο σχήμα, όπου οι S_1P και S_2P μπορούν να θεωρηθούν ουσιαστικά παράλληλες και η διαφορά δρόμου να γραφεί ως



$$x_2 - x_1 \approx f\sin\theta \approx f\frac{z}{l} \tag{10}$$

Άρα
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \approx \frac{2\pi}{\lambda} f\sin\theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} f\frac{z}{l} \tag{11}$$

Επειδή είναι
$$I = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2}$$

τότε
$$I = I_0 = 4a^2 \qquad \text{όταν} \quad \cos\frac{\delta}{2} = 1$$

ή για διαφορά δρόμου
$$f\frac{z}{l} = 0,\ \pm\lambda,\ \pm 2\lambda, \ldots\ldots,\ \pm n\lambda \tag{12}$$

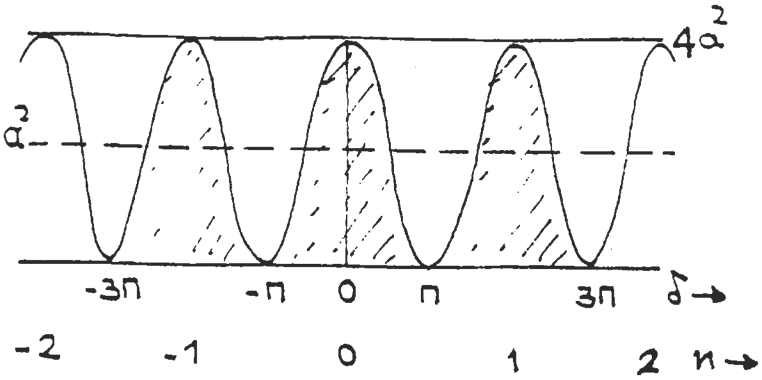
και
$$I = 0 \qquad \text{όταν} \quad \cos\frac{\delta}{2} = 0$$

ή για διαφορά δρόμου
$$f\frac{z}{l} = \pm\frac{\lambda}{2},\ \pm\frac{3\lambda}{2}, \ldots\ldots,\ \pm(n+\tfrac{1}{2})\lambda \tag{13}$$

Στην οθόνη παρατηρούνται κροσσοί συμβολής, φωτεινοί και σκοτεινοί, παράλληλοι με τις σχισμές. Ο αριθμός n είναι η τάξη συμβολής των κροσσών. Η απόσταση διαδοχικών κροσσών είναι

$$z_{n+1} - z_n = \left[(n+1) - n\right]\frac{\lambda l}{f} = \frac{\lambda l}{f} \tag{14}$$

ανεξάρτητη από το n. Η θέση z και η διαφορά φάσης συνδέονται, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} f\frac{z}{l}$.



Η ένταση μεταβάλλεται όπως το $\cos^2\frac{\delta}{2}$ και επομένως όπως το $\cos^2\left(\pi\frac{f}{\lambda l}z\right)$. Η διατήρηση της ενέργειας απαιτεί την ανακατανομή της ενέργειας, με αποτέλεσμα η ενέργεια που χάθηκε στα σημεία με ένταση μηδέν να βρίσκεται στις κορυφές της έντασης (βλ. σχήμα).

(β) Απόσταση $f << \lambda$ - Ακτινοβολία διπόλου

Αν δεν υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων που φεύγουν από τις πηγές S_1 και S_2, τότε η ένταση στο P δίνεται από τη σχέση

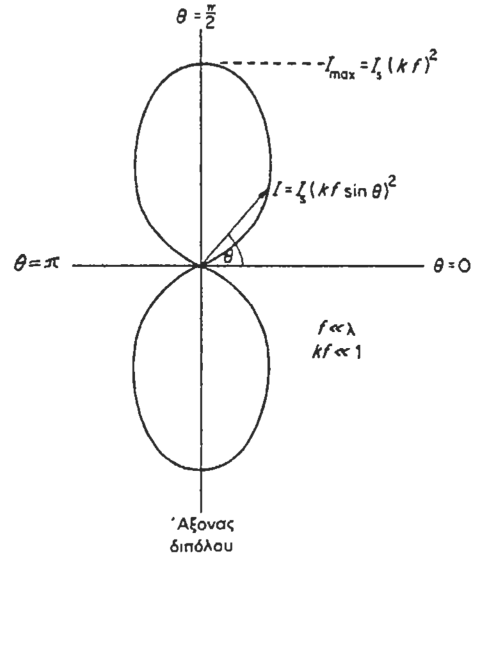
$$I = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_s\cos^2\left(\frac{kf\sin\theta}{2}\right) \approx 4I_s \qquad (15)$$

και έχει μικρή μόνο εξάρτηση από τη γωνία θ.

Αν τα σήματα από S_1 και S_2 έχουν διαφορά φάσης π, τότε

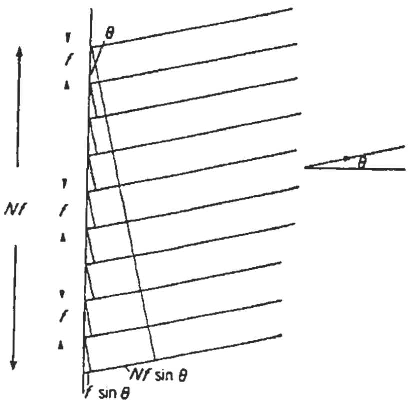
$$I = 4I_s\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_s\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{kf\sin\theta}{2}\right) = 4I_s\sin^2\left(\frac{kf\sin\theta}{2}\right) \approx I_s(kf\sin\theta)^2 \qquad (16)$$

Δύο πηγές με διαφορά φάσης π αυτού του τύπου αποτελούν ένα **δίπολο** του οποίου η ένταση ακτινοβολίας είναι $I << I_s$, όπου I_s είναι η ένταση της ακτινοβολίας από μια μοναδική πηγή, όταν $kf << 1$. Η απόδοση ακτινοβολίας εξαρτάται από το kf και για σταθερή απόσταση f αυξάνει με το k. Όπως φαίνεται στο σχήμα, αν ο άξονας του διπόλου είναι στην κατεύθυνση $\theta = \pi/2$, έχουμε πλήρη αναιρετική συμβολή στην κατεύθυνση $\theta = 0$ και μέγιστη τιμή της έντασης της ακτινοβολίας (όχι όμως πλήρη ενισχυτική συμβολή) κατά τον άξονα $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\frac{3}{2}\pi$. Η κατευθυντικότητα ενός ακτινοβολούντος διπόλου λαμβάνεται υπ' όψιν στη σχεδίαση των κεραιών εκπομπής.



5. Συμβολή από γραμμική διάταξη N πανομοιότυπων πηγών

N πανομοιότυπες πηγές σε φάση με σταθερή απόσταση διαδοχικών πηγών f (βλ. σχήμα). Το πλάτος R σε απομακρυσμένο σημείο P στην κατεύθυνση θ δίνεται από την επαλληλία N σημάτων με διαδοχικές διαφορές φάσης δ, με $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda} f \sin\theta$:



$$R = a\frac{\sin\left(N\dfrac{\delta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right)} \tag{17}$$

Η ένταση είναι:

$$I = R^2 = a^2\frac{\sin^2\left(N\dfrac{\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)} = I_s\frac{\sin^2\left(\dfrac{N\pi f\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi f\sin\theta}{\lambda}\right)}$$

$$I = I_s\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta} \tag{18}$$

όπου $I_s = a^2$ η ένταση της κάθε μιας πηγής και

$$\beta \equiv \frac{\pi f\sin\theta}{\lambda} \tag{19}$$

Για $N = 2$ παίρνουμε $I = I_s\dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin^2\beta} = 4I_s\cos^2\beta = 4I_s\cos^2\dfrac{\delta}{2}$, δηλαδή έχουμε την περίπτωση των δύο σχισμών του πειράματος *Young*.

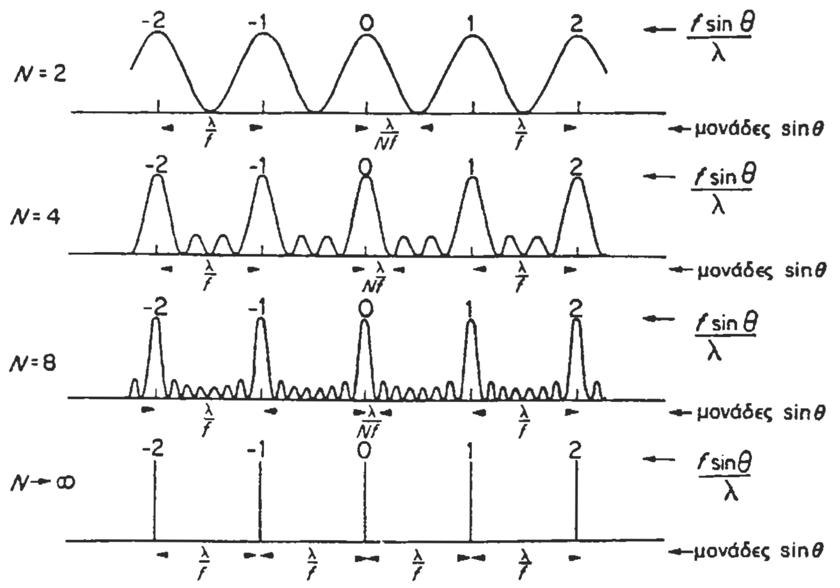
Στη συνάρτηση $\dfrac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}$,

ο αριθμητής μηδενίζεται για $N\beta = 0, \pi, 2\pi, ...$

και ο παρονομαστής για $\beta = 0, \pi, 2\pi, ...$

Όταν μηδενίζεται και ο αριθμητής και ο παρονομαστής ταυτόχρονα, δηλαδή για $\beta = \pm n\pi$, ή $f\sin\theta = \pm n\lambda$, έχουμε ενισχυτική συμβολή $n-$οστής τάξης και

$\dfrac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta} \to \dfrac{N^2\beta^2}{\beta^2} \to N^2$ και $I = N^2 I_s$ (κύρια μέγιστα).



Ένταση εικόνων συμβολής από γραμμικές διατάξεις N πανομοιότυπων πηγών με μεταξύ τους απόσταση f. Ο οριζόντιος άξονας σε μονάδες $f\sin\theta/\lambda$ δίνει τη φασματική τάξη συμβολής n. Ο άξονας σε μονάδες $\sin\theta$ δείχνει ότι η απόσταση μεταξύ των μεγίστων δίνεται από το $\sin\theta=\lambda/f$ και το εύρος στο μισό του κυρίου μεγίστου δίνεται από το $\sin\theta=\lambda/Nf$.

Ανάμεσα σε δύο κύρια μέγιστα υπάρχουν $N-1$ σημεία, όπου η ένταση γίνεται μηδέν κάθε φορά που ο αριθμητής $\sin^2 N\beta$ γίνεται μηδέν αλλά ο παρονομαστής $\sin^2\beta$ όχι (βλ. σχήμα). Αυτά δημιουργούνται όταν $\beta=\frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\pi$, δηλαδή όταν $f\sin\theta=\frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \ldots, (N-1)\frac{\lambda}{N}$.

Τα δευτερεύοντα μέγιστα συμβαίνουν περίπου στις τιμές $\beta=\frac{3\pi}{2N}, \frac{5\pi}{2N}, \ldots \frac{2N-3}{2N}\pi$. Ανάμεσα στα κύρια μέγιστα υπάρχουν λοιπόν $N-1$ ελάχιστακαι $N-2$ δευτερεύοντα μέγιστα.

6. Περίθλαση

Η περίθλαση ταξινομείται ως περίθλαση *Fraunhofer* ή *Fresnel*. Στην περίθλαση *Fraunhofer* η εικόνα δημιουργείται σε μεγάλη απόσταση από το σύστημα που περιθλά έτσι ώστε τα κύματα που την δημιουργούν μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα. Στην περίθλαση *Fresnel* η εικόνα δημιουργείται κοντά στο σύστημα και τα κύματα είναι ακόμα ουσιαστικά καμπύλα.
Θα μελετήσουμε μόνο την περίθλαση *Fraunhofer*.

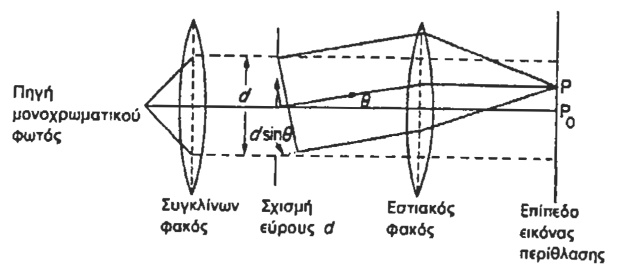
7. Περίθλαση από μονή στενή σχισμή

Αν η απόσταση f μεταξύ διαδοχικών πηγών τείνει στο ενώ το $N\to\infty$ (παράγραφος 5) ώστε $Nf\to d$, όπου d το εύρος της σχισμής, το αποτέλεσμα για N πηγές δίνει στο όριο την εικόνα περίθλασης της μονής στενής $(d\sim\lambda)$ σχισμής.

Πειραματικά η εικόνα περίθλασης σχηματίζεται αρκετά μακριά από τη σχισμή, $l >> d$ (βλ.σχήμα), ώστε να έχουμε περίθλαση *Fraunhofer*.

Από τις σχέσεις $I = I_s \dfrac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}$,

$N\beta = \dfrac{\pi}{\lambda} Nf \sin\theta$ της παραγράφου 5,



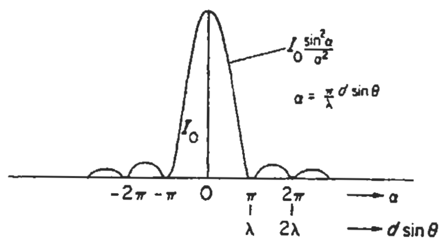
προκύπτει, με $Nf = d$ και $a = \dfrac{\pi}{\lambda} d\sin\theta$,

$$I = I_s \frac{\sin^2\left[\dfrac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right]}{\sin^2\left[\dfrac{\pi}{\lambda N} d\sin\theta\right]} = I_s \frac{\sin^2 a}{\sin^2(a/N)} \tag{20}$$

Για μεγάλο N, $\sin^2(\frac{a}{N}) \to (\frac{a}{N})^2$ και

$$I = N^2 I_s \frac{\sin^2 a}{a^2} = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2} \tag{21}$$

Η γραφική παράσταση του I συναρτήσει του a ή του $d\sin\theta$ δείχνει ένα κεντρικό μέγιστο I_0 για $a = 0$ $\quad(\theta = 0)$ (βλ. σχήμα).



Η ένταση είναι μηδέν, $I = 0$, για $\sin a = 0$ ή

$$a = \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots\ldots \tag{22}$$

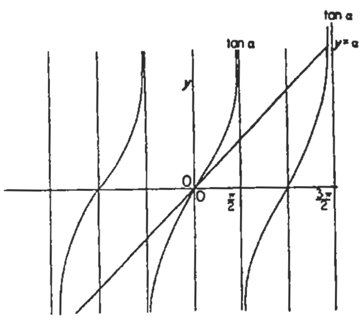
ή

$$d\sin\theta = \pm\lambda,\ \pm 2\lambda,\ \pm 3\lambda, \ldots\ldots \tag{23}$$

Οι θέσεις του κυρίου μεγίστου και των δευτερευόντων μεγίστων βρίσκονται από

$$\frac{d}{da}\left(\frac{\sin a}{a}\right) = 0 \;\to\; \frac{\cos a}{a} - \frac{\sin a}{a^2} = 0 \;\to\; a = \tan a \,,$$

δίνονται, επομένως, από τις τομές $y = a$ και $y = \tan a$ (βλ. σχήμα) και είναι προσεγγιστικά



$$a = \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots \tag{24}$$

Το εύρος του μεγίστου καθορίζεται από τη συνθήκη $d\sin\theta = \pm\lambda$. Για δεδομένο μήκος κύματος λ το εύρος του κυρίου μεγίστου αυξάνει με ελάττωση του εύρους της σχισμής.

8. Συμβολή με περίθλαση από *N* πανομοιότυπες πηγές

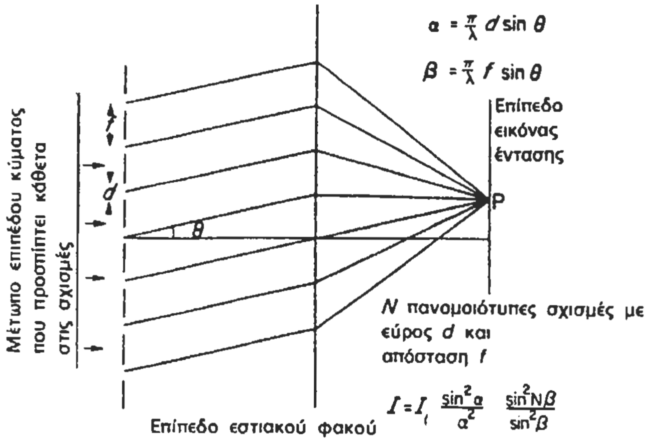
Για μια σχισμή ισχύει (παράγραφος 7):

$$I = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2}, \qquad a = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

Όταν έχουμε N τέτοιες πηγές με μεταξύ τους απόσταση f τότε (παράγραφος 5)

$$I = I_s \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}, \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} f \sin\theta,$$

όπου τώρα οι πηγές δεν είναι πιά σημειακές αλλά έχουν εύρος d (βλ. σχήμα).



Στη θέση του I_s θα βάλουμε $I_s = I_0 \dfrac{\sin^2 a}{a^2}$ (παράγραφος 7) για να λάβουμε υπόψη τη γωνιακή κατανομή στην ένταση από κάθε σχισμή που προκαλείται από την περίθλαση. Οπότε προκύπτει

$$I = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2} \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta} \tag{25}$$

με $a = \dfrac{\pi}{\lambda} d \sin\theta$ και $\beta = \dfrac{\pi}{\lambda} f \sin\theta$.

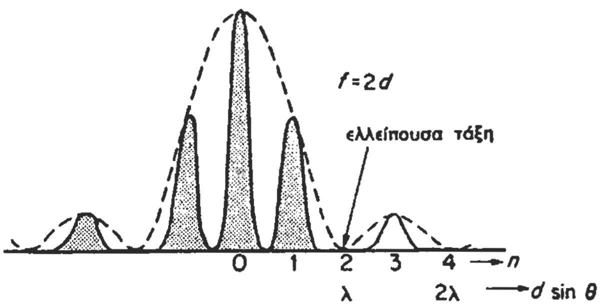
Η περιβάλλουσα $\dfrac{\sin^2 a}{a^2}$ (περίθλαση από μια σχισμή) διαμορφώνει την ένταση της εικόνας συμβολής από N σχισμές $\dfrac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}$.

9. Περίθλαση *Fraunhofer* από δύο πανομοιότυπες σχισμές (*N=2*)

Για $N = 2$ παίρνουμε

$$I = 4I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2} \cos^2\beta \tag{26}$$

Η ανάλυση διαφέρει από αυτήν των δύο σχισμών του πειράματος *Young* στο ότι τώρα οι σχισμές έχουν εύρος d (δεν θεωρείται απειροστό) και ο παράγοντας $\dfrac{\sin^2 a}{a^2}$ μεταβάλλεται σημαντικά από σημείο σε σημείο της εικόνας περίθλασης. Η ένταση μηδενίζεται στα ελάχιστα της περίθλασης $d\sin\theta = n\lambda$ $(\frac{\sin a}{a} = 0)$ και στα ελάχιστα της συμβολής $f\sin\theta = (n+\frac{1}{2})\lambda$ $(\cos\beta = 0)$. Τα μέγιστα παρατηρούνται (περίπου) στις θέσεις για τις οποίες $f\sin\theta = n\lambda$. Αν στην ίδια θέση συμβαίνει να υπάρχει ελάχιστο (= 0) στην περίθλαση, δηλαδή $d\sin\theta = m\lambda$, τότε το μέγιστο λείπει και η τάξη συμβολής n ονομάζεται *ελλείπουσα τάξη* (βλ. σχήμα).



Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{n\lambda}{m\lambda} = \frac{f\sin\theta}{d\sin\theta}$,

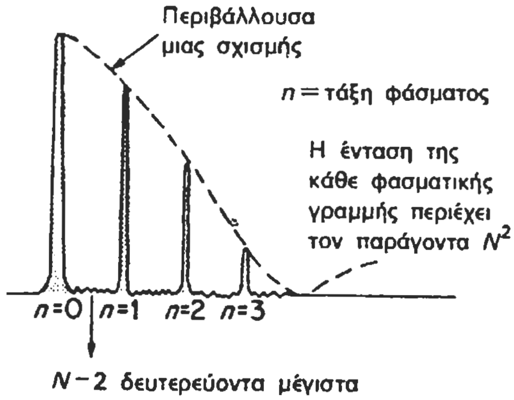
δηλαδή $\frac{n}{m} = \frac{f}{d} = \frac{\beta}{a}$.

Αν π.χ. $\frac{f}{d} = 2$, οι ελλείπουσες τάξεις είναι $n_c = 2m$ $(m = 1,2,3....)$, δηλαδή οι $n_c = 2,4,6....$

10. Περιθλαστικό φράγμα μετάδοσης (*N* μεγάλο)

Ένας μεγάλος αριθμός N ισοδύναμων σχισμών αποτελεί ένα περιθλαστικό φράγμα μετάδοσης όπου η κοινή απόσταση f μεταξύ διαδοχικών σχισμών ονομάζεται *σταθερά φράγματος*.

Η ένταση είναι $I = I_0 \frac{\sin^2 a}{a^2} \cdot \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}$



Τα κύρια μέγιστα συμβολής εμφανίζονται όταν ικανοποιείται η συνθήκη $f\sin\theta = n\lambda$, έχουν ένα παράγοντα N^2 στην έντασή τους και παρατηρούνται ως **φασματικές γραμμές** τάξης n. Η φασματική γραμμή για $n = 0$ είναι κοινή για όλα τα μήκη κύματος (συνεπώς λευκή). Για $n > 0$ παρατηρείται διαχωρισμός των φασματικών γραμμών με διαφορετικά λ. Οι εντάσεις των φασματικών γραμμών για σταθερό λ μειώνονται καθώς αυξάνει η τάξη του φάσματος, επειδή τις τροποποιεί η περιβάλλουσα $\frac{\sin^2 a}{a^2}$. (Η διακριτική ικανότητα όμως αυξάνει.)